Lineare Algebra: Vektorgeometrie

3.1 *Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems.*

$$\begin{array}{llll} x & +y & & = 5/3 \\ & y & -2z & = 1 \quad |\cdot(-1) \\ & y & +z & = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} x & +y & & = 5/3 \\ & y & -2z & = 1 \\ & & +3z & = 1 \end{array}$$

Aus der 3.Zeile folgt: $z = \frac{1}{3}$

Aus der 2.Zeile folgt: $y - \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow y = \frac{5}{3}$

Aus der 1.Zeile folgt: $x + \frac{5}{3} = \frac{5}{3} \Rightarrow x = 0$

Lösungsmenge $L = \{(0 \,|\, \frac{5}{3} \,|\, \frac{1}{3})\}$ bzw. Lösungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

3.2.1 *Begründen Sie, dass g parallel zur* x_1x_3 – *Ebene ist.*

Die Gerade ist parallel zur x_1x_3 – Ebene, da die x_2-Koordinate des Richtungsvektors den Wert 0 besitzt.

Geben Sie eine Gerade an, die parallel zur Geraden g ist und von dieser den Abstand 5 Längeneinheiten hat.

Da die gesuchte Gerade parallel zu g ist, wird der Richtungsvektor von g beibehalten. Nun benötigt man noch einen Punkt der gesuchten Geraden.
Da die Gerade g parallel zur x_1x_3 – Ebene ist, enthält die gesuchte Gerade den Punkt P(5|6|1). Die Koordinaten von P ergeben sich aus dem Ortsvektor von g, wobei die x_2 -Koordinate um 5 vergrößert wurde.

Geradengleichung der gesuchten Geraden: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

3.2.1 *Begründen Sie, dass g parallel zur* x_1x_3 – *Ebene ist.*

Die Gerade ist parallel zur x_1x_3 -Ebene, da die Gerade keinen Spurpunkt mit der x_1x_3 -Ebene besitzt.

Rechnerische Kontrolle, dass der Spurpunkt $S_{13}(x_1\,|\,0\,|\,x_3)$ nicht auf g liegt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$ Aus der 2.Zeile folgt ein Widerspruch 0 = 1.

Geben Sie eine Gerade an, die parallel zur Geraden g ist und von dieser den Abstand 5 Längeneinheiten hat.

3.2.2 *Berechnen Sie den Abstand, den der Punkt P(0/0/0) zu g hat.*

Ein laufender Punkt auf g hat die Koordinaten $L(5+2r\,|\,1\,|\,1+3r)$

Bedingung: $\overrightarrow{OL} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5+2r \\ 1 \\ 1+3r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

$$\Rightarrow 10 + 4r + 3 + 9r = 0 \Rightarrow 13r = -13 \Rightarrow r = -1$$

Koordinaten des Lotfußpunktes: L(3|1|-2).

Gesuchter Abstand: $\left|\overrightarrow{OL}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$