Aufgabe 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 1 & -3 & 7 \\ 5 & -3 & -1 & -11 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad |\cdot 5$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \quad |\cdot 2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die letzten Zeile ist eine Nullzeile, das heißt, es verbleiben nur noch 2 Gleichungen mit 3 Variablen.
Das bedeutet, dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen besitzt.

Setze $x_3 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$.
Aus der 2.Zeile folgt: $-2x_2 - 4t = -4 \Rightarrow x_2 = -2t + 2$
Aus der 1.Zeile folgt: $-5x_1 + (-2t + 2) - 3t = 7 \Rightarrow -5x_1 = 5t + 5 \Rightarrow x_1 = -t - 1$

Die drei Gleichungen beschreiben drei Ebenen im dreidimensionalen Raum.
Die unendlich vielen Lösungen beschreiben eine Schnittgerade, in der sich alle drei Ebenen schneiden.

Aufgabe 2:

Gleichung der Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

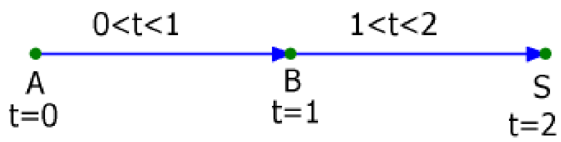
Gleichung der Ebene E.
Da die Gerade g orthogonal zu E verläuft, ist der Normalenvektor von E der Richtungsvektor von g: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Ansatz für die Koordinatengleichung von E: $x_1 - 2x_2 - 3x_3 = d$
Einsetzen des Ebenenpunktes C(4/3/-8): $4 - 2 \cdot 3 - 3 \cdot (-8) = 22$ und damit ist d = 22
Koordinatengleichung von E: $x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 22$

Schnittpunkt S von g und E:
$(1+t) - 2(-1-2t) - 3(3-3t) = 22 \quad \Rightarrow 1 + t + 2 + 4t - 9 + 9t = 22 \quad \Rightarrow 14t - 6 = 22$
$\Rightarrow t = 2$

Einsetzen von t = 2 in die Geradengleichung liefert den Schnittpunkt S(3/-5/-3).

Kontrolle, ob der Punkt S zwischen A und B liegt:
Die Parameterform von g ist so aufgebaut: $\vec{x} = \overline{OA} + t \cdot \overline{AB}$
Da der Schnittpunkt S für t = 2 erreicht wird, gilt $\overline{OS} = \overline{OA} + 2 \cdot \overline{AB}$



Damit der Punkt S zwischen A und B liegt, müsste der Parameter t zwischen 0 und 1 liegen.
Da t = 2 ist, liegt der Punkt S nicht zwischen A und B.

Aufgabe 3:

a) Damit die Gerade in E liegt, muss der Punkt P(1/b/1) in der Ebene E liegen.

Einsetzen von P(1/b/1) in die Koordinatengleichung: $2\cdot 1+2\cdot b+1=5 \Rightarrow b=1$

Der Richtungsvektor von g muss orthogonal zum Normalenvektor von E sein.

Es muss gelten: $\begin{pmatrix}1\\0\\a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=0 \quad \Rightarrow 2+a=0 \Rightarrow a=-2$

Gleichung der Geraden g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$

b) Ein Punkt, der auf der Geraden h liegt ist A(1/1/1) (Ortsvektor von g).

Der Richtungsvektor $\vec{u}$ von h muss senkrecht auf dem Richtungsvektor von g stehen.
Außerdem muss $\vec{u}$ auch senkrecht auf dem Normalenvektor der Ebene stehen.

Somit gilt: $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-5\\2\end{pmatrix}$

Gleichung von h: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4\\-5\\2\end{pmatrix}$

Aufgabe 4:

a) E und g sind parallel, wenn der Normalenvektor von E und der Richtungsvektor von g orthogonal zueinander sind.

Es gilt $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 8 - 4 - 4 = 0$ und damit sind die Vektoren orthogonal zueinander.

b) Der Abstand von E und g wird dadurch bestimmt, dass der Abstand des Geradenpunktes P(7/5/-7) zur Ebene E ermittelt wird.

Ebenengleichung als Koordinatengleichung: $8x_1 + x_2 - 4x_3 = d$

Punktprobe mit Ebenenpunkt B(-1/4/-3) ergibt $8 \cdot (-1) + 4 - 4 \cdot (-3) = 8 = d$

E: $8x_1 + x_2 - 4x_3 = 8$

HNF von E: $\dfrac{8x_1 + x_2 - 4x_3 - 8}{\sqrt{64 + 1 + 16}} = 0$

Einsetzen von P in die HNF von E: $d = \left| \dfrac{8 \cdot 7 + 5 - 4 \cdot (-7) - 8}{9} \right| = 9$

Die Gerade von der Ebene den Abstand 9.

Aufgabe 5:

Der Normalenvektor von E_1 lautet $\overline{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Ebene E_2 ist parallel zur Ebene E_1, wenn $\overline{n_1}$ auch ein Normalenvektor von E_2 ist.
Dies ist dann der Fall, wenn der Vektor $\overline{n_1}$ orthogonal zu den beiden Richtungsvektoren der Ebene E_2 ist.

Kontrolle: $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 - 2 = 0$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 - 6 + 4 = 0$

Damit ist die Orthogonalität gezeigt. Somit sind die beiden Ebenen parallel.

Da die Ebene E_3 parallel zu den beiden anderen Ebenen sein soll, kann für diese Ebene auch der Normalenvektor $\overline{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gewählt werden.

Um die Gleichung von E_3 aufzustellen, wird noch ein Punkt dieser Ebene bestimmt werden.

Ein (beliebiger) Punkt von E_1 lautet A(0/0/-1).
Ein (beliebiger) Punkt von E_2 lautet B(7/7/5).

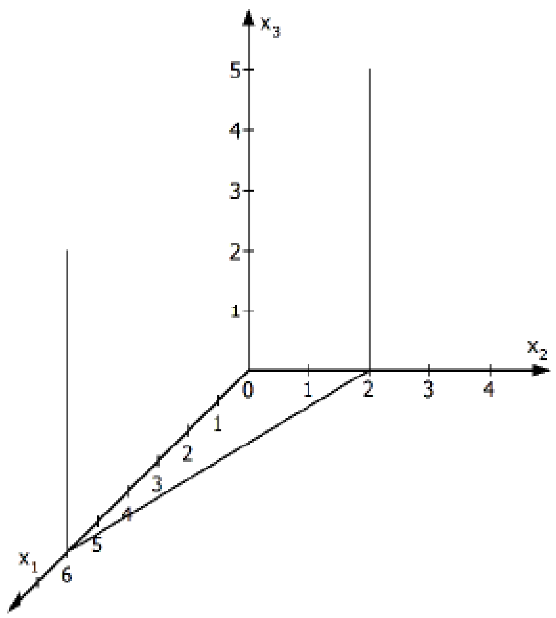
Der Mittelpunkt M der Strecke AB liegt auf der Ebene E_3.

Berechnung von M: $\overline{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overline{OA} + \overline{OB}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 3{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$, also M(3,5/3,5/2)

Eine Gleichung von E_3 lautet $\left[\bar{x} - \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 3{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$.

Aufgabe 6:

a) Für die Veranschaulichung der Ebene E benötigt man die Spurpunkte von
E: $x_1 + 3x_2 = 6$
Schnittpunkt mit x_1 -Achse: $S_1(6 / 0 / 0)$
Schnittpunkt mit x_2 -Achse: $S_2(0 / 2 / 0)$
Die Ebene schneidet die x_3 -Achse nicht (da in der Koordinatengleichung die Variable x_3 nicht auftaucht).
Die Ebene E ist daher parallel zur x_3 -Achse.



b) Koordinatengleichung von F: $2x_1 - x_3 = d$
Einsetzen des Punktes A(2/5/3): $2 \cdot 2 - 3 = d \Rightarrow d = 1$
Koordinatengleichung von F: $2x_1 - x_3 = 1$

Berechnung der Schnittgeraden ergibt sich durch das Lösen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{array}{lllll} 2x_1 & & -x_3 & = & 1 \\ x_1 & +3x_2 & & = & 6 \end{array}$$

Setze $x_2 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$
Aus der 2.Zeile folgt $x_1 + 3t = 6 \Rightarrow x_1 = 6 - 3t$
Aus der 1.Zeile folgt $2(6-3t) - x_3 = 1 \Rightarrow x_3 = 11 - 6t$

Gleichung der Schnittgeraden: $\bar{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

c) Die gesuchte Gerade h ist eine Gerade, die parallel zur Schnittgeraden verläuft und einen Punkt enthält, der zwar auf E liegt, aber nicht auf F.
Solch ein Punkt wäre beispielsweise A(6/0/0).
Eine mögliche Gerade wäre also h: $\bar{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$