

Erwartungswert

Definition:

Eine Zufallsgröße X nehme die Werte x_1, x_2, \dots, x_n mit den Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_1), P(X = x_2), \dots, P(X = x_n)$ an.

Dann heißt die Zahl $E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \dots + x_n \cdot P(X = x_n)$

Erwartungswert der Zufallsgröße X .

Der Erwartungswert ist ein theoretischer Wert, den man bei häufiger Versuchsdurchführung annähernd als Mittelwert erhalten wird.

Anwendung des Erwartungswerts

Mit Hilfe von Wahrscheinlichkeiten möchte man z. B. bei Glücksspielen Aussagen über den zu erwartenden Gewinn und Verlust machen.

Leitfrage:

Welchen Gewinn pro Spiel kann man bei häufiger Durchführung erwarten?

Aufgabe 1: Würfeln mit zwei Würfeln

Man könnte ein Glücksspiel hieraus machen, indem man folgende Spielregel aufstellt:

"Die in einem Wurf erreichte Augensumme wird in € ausgezahlt."

Der Betreiber des Spiels muss sich natürlich Gedanken darüber machen, wie hoch der Einsatz pro Spiel sein muss, damit er keinen Verlust erleidet. Dazu muss er wissen, welchen Betrag er im Mittel pro Spiel bei sehr vielen Spielen auszuzahlen hat. So hoch muss auch mindestens der Einsatz sein. Die Zufallsvariable X gibt dann die Augensumme von 2 bis 12 an.

Erwartungswert

a) Vervollständige die Tabelle:

Augensumme x_i	$P(X = x_i)$	Erwarteter Gewinn pro Augensumme $x_i \cdot P(X = x_i)$
2	$\frac{1}{36}$	$2 \cdot \frac{1}{36}$
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
Erwarteter Gesamtgewinn für den Betreiber $E(X)$		

b) Wie hoch muss der Einsatz gewählt werden, damit der Betreiber von seinem Glückspiel profitiert?

c) Betrachte nun das Spiel aus der Sicht eines Spielers, der pro Spiel 8€ Einsatz zahlen muss. Für ihn berechnet sich der Gewinn aus: Gewinn = Auspielung – Einsatz.

Der Gewinn entspricht nun einer Zufallsvariable, die wir Y nennen.

Bestimme den Erwartungswert für den Gewinn des Spielers $E(Y)$. Ist das Spiel fair?