3 Vektorgeometrie

3.1 *Untersuchen Sie die beiden Geraden auf ihre gegenseitige Lage.*

Zeige zunächst, dass die Geraden nicht parallel sind.
Die Geraden müssen gleichgesetzt werden.

Die Geraden sind nicht parallel, da die Richtungsvektoren der beiden Geraden keine Vielfachen zueinander sind.

Es gibt kein Wert für k, so dass gilt: $k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Die Geraden sind daher entweder windschief zueinander oder schneiden sich.

Prüfung durch Gleichsetzen der Geradengleichungen:

$$\begin{array}{rlcll} 1 & +4r & = & 2 & -s \\ 7 & +2r & = & 1 & -s \\ -2 & & = & 5 & +4s \end{array}$$

Aus der 3.Zeile folgt: $s = -\frac{7}{4} = -1{,}75$

Aus der 2.Zeile folgt: $7 + 2r = 1 + \frac{7}{4} \Rightarrow 2r = \frac{11}{4} - 7 \Rightarrow 2r = -\frac{17}{4} \Rightarrow r = -\frac{17}{8}$

Prüfung, ob die 1.Zeile stimmt:

$1 + 4 \cdot (-\frac{17}{8}) = 2 - (-\frac{7}{4}) \quad \Rightarrow 1 - \frac{17}{2} = 2 + \frac{7}{4} \quad \Rightarrow -\frac{15}{2} = \frac{15}{4}$ falsche Aussage

Die Geraden sind windschief zueinander.

3.2 *Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden* g_3*, die sowohl* g_1 *als auch* g_2 *schneidet.*

Wähle zwei Punkte A und B, die jeweils auf einer der beiden Geraden liegen.
Die gesuchte Gerade verläuft durch diese beiden Punkte.

Der Punkt A(1/7/-2) liegt auf der Gerade g_1 .
Der Punkt B(2/1/5) liegt auf der Gerade g_2.

Gleichung der Gerade g_3, die durch A und B verläuft: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$

3.3 *Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden* g_4 *, die* g_1 *rechtwinklig schneidet.*

Die gesuchte Gerade verläuft durch einen Punkt, der auf g_1 liegt. Außerdem müssen die Richtungsvektoren zueinander orthogonal sein.

Die gesuchte Gerade g_4 verläuft durch den Punkt A(1/7/-2).

Der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ von g_4 muss senkrecht auf dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ stehen.

Es muss gelten: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 4a + 2b = 0$

Die Gleichung ist zum Beispiel erfüllt für a = 1 und b = -2 und c = 0.

Ein möglicher Richtungsvektor ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es gibt jedoch auch andere Lösungen.

Eine mögliche Gleichung von $g_4 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Geben Sie den Abstand von g_1 *zur* x_1x_2 *-Ebene an.*

Begründe, weshalb die Gerade parallel zur x_1x_2 - Ebene ist. Der gesuchte Abstand kann am Richtungsvektor abgelesen werden.

Die Gerade g_1 ist parallel zur x_1x_2 -Ebene, da im Richtungsvektor die dritte Koordinate 0 ist.
Den Abstand der Gerade von der x_1x_2 -Ebene kann man anhand der dritten Koordinate des Ortsvektors ablesen.

Da diese Koordinate -2 ist, ist der gesuchte (positive) Abstand 2.