Lösungen

Aufgabe 1:

Die Lotgerade g steht senkrecht auf E und geht durch den Punkt R.

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt von E mit g: $2(4+2s)+3(0+3s)+6(7+6s)=1$

$8+4s+9s+42+36s=1 \Rightarrow 49s=-49 \Rightarrow s=-1$

Einsetzen von s = -1 in die Geradengleichung ergibt Lotfußpunkt F(2/-3/1).

Abstand von R zu E: $\left|\overline{FR}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+9+36} = 7$

Aufgabe 2:

a) Ansatz Koordinatengleichung von E: $2x_1 + 6x_2 + 9x_3 = d$
   Einsetzen von P(2/3/6) in E: $2 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 9 \cdot 6 = d \Rightarrow d = 76$
   Koordinatengleichung von E: $2x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 76$
   Hesse'sche Normalenform von E: $\frac{2x_1 + 6x_2 + 9x_3 - 76}{\sqrt{4+36+81}} = 0 \Rightarrow \frac{2x_1 + 6x_2 + 9x_3 - 76}{11} = 0$

b) Hesse'sche Normalenform von E: $\frac{x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 1}{\sqrt{1+9+4}} = 0 \Rightarrow \frac{x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 1}{\sqrt{14}} = 0$

c) Umwandlung der Parametergleichung in eine Koordinatengleichung:

   $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$ bzw. vereinfacht $\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

   Ansatz Koordinatengleichung von E: $-3x_1 + x_2 - 2x_3 = d$
   Einsetzen von P(1/5/7) in E: $-3 + 5 - 14 = d \Rightarrow d = -12$
   Koordinatengleichung von E: $-3x_1 + x_2 - 2x_3 = -12$
   Hesse'sche Normalenform von E: $\frac{-3x_1 + x_2 - 2x_3 + 12}{\sqrt{9+1+4}} = 0 \Rightarrow \frac{-3x_1 + x_2 - 2x_3 + 12}{\sqrt{14}} = 0$

Aufgabe 3:

Ansatz für die Koordinatengleichung von E: $-0,5x_1 + x_2 - x_3 = d$
Einsetzen von P(6/4/-1): $-0,5 \cdot 6 + 4 - (-1) = d \Rightarrow d = 2$
Koordinatengleichung von E: $-0,5x_1 + x_2 - x_3 = 2$

Hesse'sche Normalenform von E: $\frac{-0,5x_1 + x_2 - x_3 - 2}{\sqrt{0,25+1+1}} = 0 \Rightarrow \frac{-0,5x_1 + x_2 - x_3 - 2}{1,5} = 0$

Abstand von O(0/0/0) zu E: $d = \left|\frac{-0,5 \cdot 0 + 0 - 0 - 2}{1,5}\right| = \frac{4}{3}$

Aufgabe 4:

Der Abstand von P zu den Koordinatenebenen kann man direkt an den Koordinaten von P ablesen:

Abstand von der x_1x_2-Ebene (ablesbar am x_3-Wert von P) = 2
Abstand von der x_1x_3-Ebene (ablesbar am x_2-Wert von P) = 4
Abstand von der x_2x_3-Ebene (ablesbar am x_1-Wert von P) = 3

Aufgabe 5:

a) Ansatz für die Koordinatengleichung von E: $8x_1 + 4x_2 + 8x_3 = d$
Einsetzen von P(1/0/-1): $8 + 0 - 8 = d \Rightarrow d = 0$
Koordinatengleichung von E: $8x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 0$

Hesse'sche Normalenform von E: $\frac{8x_1 + 4x_2 + 8x_3}{\sqrt{64+16+64}} = 0 \Rightarrow \frac{8x_1 + 4x_2 + 8x_3}{12} = 0$

Abstand von A(7/4/9) zu E: $d = \left|\frac{56+16+72}{12}\right| = 12$

b) Hesse'sche Normalenform von E: $\frac{4x_1 - 3x_3 - 10}{\sqrt{16+9}} = 0 \Rightarrow \frac{4x_1 - 3x_3 - 10}{5} = 0$

Abstand von P(2/-3/5) zu E: $d = \left|\frac{8-15-10}{5}\right| = \frac{17}{5}$

Aufgabe 6:

Berechnung des Schnittpunktes von g und E: $4(10+r) + 0,5(-3+4r) - 2(-2+3r) = 2$
$\Rightarrow 40 + 4r - 1,5 + 2r + 4 - 6r = 2 \Rightarrow 42,5 = 2$

Aufgrund des entstehenden Widerspruchs existiert kein Schnittpunkt.
Daher ist g zu E parallel.

Zur Berechnung des Abstandes wird ein Punkt A(10/-3/-2) von g ausgewählt und der Abstand von A zur Ebene E berechnet.

Hesse'sche Normalenform von E: $\frac{4x_1+0,5x_2-2x_3-2}{\sqrt{16+0,25+4}}=0 \Rightarrow \frac{4x_1+0,5x_2-2x_3-2}{4,5}=0$

Abstand von A(10/-3/-2) zu E: $d=\left|\frac{40-1,5+4-2}{4,5}\right|=9$

Die Gerade g hat von der Ebene E den Abstand 9.

Aufgabe 7:

Die Ebenen sind parallel, da die Normalenvektoren der Ebenen E und F Vielfache zueinander sind.

Wir wählen einen beliebigen Punkt der Ebene F, z.B. A(0/0/5).

Der Abstand der beiden parallelen Ebenen entspricht dem Abstand des Punktes A von der Ebene E.

Hesse'sche Normalenform von E: $\frac{2x_1-2x_2+x_3+1}{\sqrt{4+4+1}}=0 \Rightarrow \frac{2x_1-2x_2+x_3+1}{3}=0$

Abstand von A(0/0/5) zu E: $d=\left|\frac{0-0+5+1}{3}\right|=2$

Der Abstand der beiden Ebenen beträgt 2.

Aufgabe 8:

Hesse'sche Normalenform von E: $\frac{6x_1-3x_2-2x_3-12}{\sqrt{36+9+4}}=0 \Rightarrow \frac{6x_1-3x_2-2x_3-12}{7}=0$

Gleichung der Ebene F: $\frac{6x_1-3x_2-2x_3-12}{7}=6 \Rightarrow 6x_1-3x_2-2x_3=54$

Gleichung der Ebene G: $\frac{6x_1-3x_2-2x_3-12}{7}=-6 \Rightarrow 6x_1-3x_2-2x_3=-30$

Aufgabe 9:

Ein allgemeiner Punkt der Geraden g hat die Koordinaten $P(-1+3r\,/\,2+r\,/\,r)$.

Gesucht sind die Werte von r, so dass gilt: $d(P,E)=5$

Ansatz für Koordinatengleichung von E: $4x_1-4x_2+7x_3=d$
Einsetzen des Ebenenpunktes A(1/2/1): $4-8+7=d \Rightarrow d=3$

Koordinatengleichung von E: $4x_1-4x_2+7x_3=3$

Hesse'sche Normalenform von E: $\frac{4x_1 - 4x_2 + 7x_3 - 3}{9} = 0$

$$d(P,E) = \left| \frac{4(-1+3r) - 4(2+r) + 7r - 3}{9} \right| = 5$$

$$\Rightarrow \left| \frac{15r - 15}{9} \right| = 5$$

1.Fall: $\frac{15r-15}{9} = 5 \Rightarrow 15r - 15 = 45 \Rightarrow r = 4$ also $P(11/6/4)$

2.Fall: $\frac{15r-15}{9} = -5 \Rightarrow 15r - 15 = -45 \Rightarrow r = -2$ also P(-7/0/-2)

Aufgabe 10:

a) Zunächst wird gezeigt, dass es sich bei dem Viereck ABCD um ein Parallelogramm handelt:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Da $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ist, handelt es sich um ein Parallelogramm.

Nun wird gezeigt, dass das Viereck einen rechten Winkel besitzt:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 - 6 + 6 = 0$$

Somit existiert im Punkt A einen rechten Winkel.
Damit ist das Viereck ABCD ein Rechteck.

b) Einsetzen der 4 Punkte ABCD in die Ebenengleichung:

A(4/3/1) einsetzen: $4 + 6 - 2 = 8 \Rightarrow 8 = 8$ wahre Aussage
B(4/6/4) einsetzen: $4 + 12 - 8 = 8 \Rightarrow 8 = 8$ wahre Aussage
C(12/4/6) einsetzen: $12 + 8 - 12 = 8 \Rightarrow 8 = 8$ wahre Aussage
D(12/1/3) einsetzen: $12 + 2 - 6 = 8 \Rightarrow 8 = 8$ wahre Aussage

Die Punkte A,B,C,D und damit das Rechteck liegt in der Ebene E.

Rechteck in der Ebene E: $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 8$ liegt.