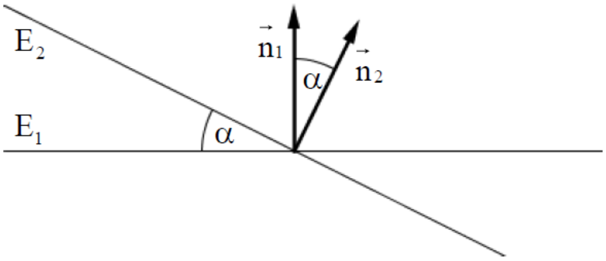
Anwendung: Bestimmung von Schnittwinkeln zwischen Ebenen

Der Schnittwinkel zweier Ebenen E_1 und E_2 ist identisch mit dem Schnittwinkel der beiden Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$.



Für den Schnittwinkel α zweier Ebenen E_1 und E_2 gilt:

$$\cos\alpha = \left| \frac{\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right|$$

Beispiel: Bestimmen Sie den Schnittwinkel der beiden Ebenen

$$E_1: \quad 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 2 = 0$$
$$E_2: \quad -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 1 = 0$$

Für die Normalenvektoren der beiden Ebenen gilt:

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dann folgt für den Schnittwinkel α der beiden Ebenen:

$$\cos\alpha = \left| \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right|} \right| = \left| \frac{4}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{9}} \right| = \tfrac{4}{63} \cdot \sqrt{21} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 73{,}1^\circ$$

Aufgaben:

2. Berechnen Sie den Schnittwinkel der beiden Ebenen

a)
$$E_1: \quad -3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3 = 0$$
$$E_2: \quad -3x_1 - 2x_2 - x_3 + 1 = 0$$

b)
$$E_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$E_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \eta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$