Anwendung: Bestimmung von Schnittwinkeln zwischen Geraden

Unter dem Schnittwinkel zweier Geraden g und h versteht man den nichtstumpfen Winkel der von den beiden Geraden gebildet wird.

Wir betrachten die beiden Geraden $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$ und $h: \vec{x} = \vec{b} + \mu \cdot \vec{v}$.
Wenn wir uns zurück erinnern, dann gilt für den von den beiden Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ eingeschlossenen Winkel:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Beispiel:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Da beiden Geraden den selben Stützpunkt haben und die Richtungsvektoren haben linear unabhängig sind folgt, dass sich die beiden Geraden im Punkt $S(1|1|2)$ schneiden. Für den Schnittwinkel folgt:

$$\cos\alpha = \left| \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right|} \right| = \left| \frac{-10}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{10}} \right| = \left| -\sqrt{\tfrac{5}{7}} \right| = \sqrt{\tfrac{5}{7}} \;\Rightarrow\; \alpha \approx 32{,}3°$$

Aufgaben:

1. Berechnen Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel der beiden Geraden

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$