Das Bogenmaß

Uns ist bekannt, dass man den Vollwinkel in 360 gleichgroße Winkel teilen kann. Jeden dieser Winkel können wir wieder in 60 gleichgroße Winkel teilen. (Ein solcher Winkel hätte dann die Größe 1′ (eine Minute).)

Diese Art der Unterteilung stammt von den Babyloniern, die mit dem so genannten Sexagesimalsystem gerechnet haben. In diesem System konnte das Zeichen für die '1' auch 60 oder $60 \cdot 60 = 60^2$, ..., auch $\frac{1}{60}$, ... bedeuten.

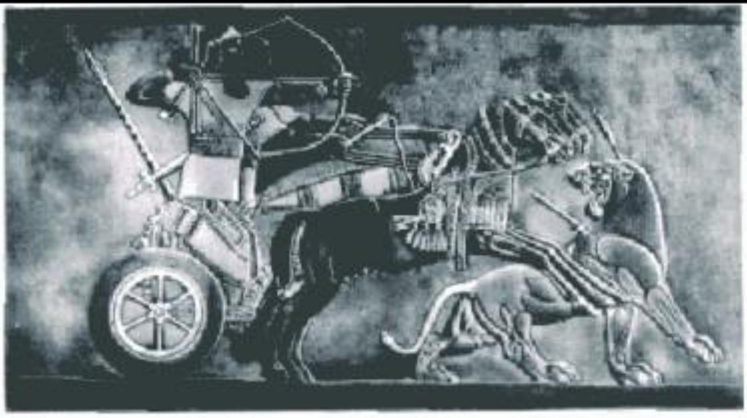

Abb. 21 Assurnasirpal II. (883—859 v. u. Z.) auf seinem Streitwagen bei der Löwenjagd. Sechsspeichenrad

Die Vorliebe für die Zahl 6 könnte viele Gründe haben. Bekannt ist aber heute, dass die Räder babylonischer Wagen sechs Speichen hatten (siehe Bild eines babylonischen Streitwagens). Die Ägypter bevorzugten vier Speichen.

Der Umfang eines Kreises läßt sich leicht in sechs gleiche Teile zerlegen, wenn man den Radius dieses Kreises sechsmal abträgt. Es entsteht dann ein regelmäßiges Sechseck.[1]

Außerdem kann man die Zahlen von 1 bis 60 auch leicht mit den Fingern der beiden Hände bezeichnen. Zeige mit einem der 5 Finger der linken Hand auf jeweils ein Fingerglied der vier großen Finger (ohne Daumen) der rechten Hand, so erhältst du $5 \cdot 12 = 60$ verschiedene Handzeichen.

Das Zahlensystem der Babylonier hatte enorme praktische Vorzüge bei komplizierten Rechnungen, wie sie z.B. in der Astronomie, dem Kanalbau (künstliche Bewässerung),... notwendig waren. Dieses System wurde u.a. vom großen Astronomen Ptolemäus übernommen und hat seine Spuren bis auf den heutigen Tag hinterlassen (Zeiteinteilung!).

Nun ist den Mathematikern (zum Leidwesen **vieler** Schüler) eingefallen[2], dass man die Größe eines Winkels auch ganz anders messen kann. - Wie dies geschieht, soll jetzt dargestellt werden:

Der Umfang eines Kreises berechnet sich nach der Formel $U = 2 \cdot \pi \cdot r$. - Nimmt man einen Kreis mit dem Radius $r = 1$ (einen Einheitskreis), wird es besonders einfach: $U = 2 \cdot \pi \cdot 1$.

Ich zeichne einfach einmal einen Winkel mit der Größe $\alpha = 49°$. Anschließend zeichne ich einen Einheitskreis ($r = 1$), dessen Mittelpunkt der Scheitel des eben gezeichneten Winkels ist. Die Schenkel des Winkels schneiden nun aus dem Kreis einen Bogen mit ganz bestimmter Länge x aus. (Bitte diese Tätigkeit selbst jetzt durchführen!) Die Länge x dieses Bogens bestimme ich. (Ich könnte z.B. einen Faden genau über das Bogenstück legen und anschließend das Fadenstück an ein Lineal legen. Dann hätte ich einen Näherungswert für die Bogenlänge).[3]

---

1 Beweis? - Konstruktion selber durchführen!

2 Weil man als Definitionsmenge von Winkel**funktionen**, wie bei Funktionen üblich, reelle Zahlen ($\mathbb{R}$) nehmen möchte

3 Im mathematisch exakten Sinne ist die Bogenlänge x natürlich inkommensurabel.

Das Bogenmaß

Es ist doch nun wirklich gleichgültig, ob ich sage, dass der Winkel $\alpha = 49°$ groß ist, oder ob ich sage, wie lang das Bogenstück x ist, das die Schenkel des Winkels α auf dem Einheitskreis ausgeschnitten haben, oder? Durch die Angabe dieser Bogenlänge x weiß ich genau, wie groß der Winkel α ist!

<u>Beispiel:</u> Ein Winkel der Größe 60° schneidet ein Sechstel vom Umfang des Einheitskreises aus. Ein Sechstel des Umfangs 2π ist $\frac{\pi}{3}$. - **Also entspricht dem Winkel mit der Größe 60° das Bogenmaß $\frac{\pi}{3}$** ($\approx$ 1,05 , wenn ich an $\pi \approx 3{,}14$ denke).

Man kann auch sagen, dass der Winkel im Bogenmaß die Größe $\frac{\pi}{3}$ hat. Oder kurz: **Der Winkel hat die Größe $\frac{\pi}{3}$** ($\approx$1,05). Eine Verwechslung mit dem Gradmaß ist nicht möglich, weil ich sagte, *der Winkel habe ungefähr die Größe **1,05*** und nicht: *der Winkel sei ungefähr **1,05 Grad** groß.*

<u>Wichtiger Hinweis für den Taschenrechner:</u>

Zunächst muß eingestellt werden, ob der TR Gradzahlen oder Zahlen im Bogenmaß "verarbeiten" soll. Dies geschieht dadurch, dass man den TR in den MODUS (Zustand) DEG (degree) stellt, wenn er im gewohnten Gradmaß rechnen soll. Stellt man den TR in den Modus RAD, rechnet er mit dem Bogenmaß.

Offensichtlich gilt die Verhältnisgleichung: $\boxed{\frac{\alpha}{360°} = \frac{x}{2\cdot\pi}}$ (x: Bogenmaß des Winkels α)

<u>Aufgaben:</u>

a) Löse die Verhältnisgleichung einmal nach α , einmal nach x auf !

b) Bestimme <u>ohne</u> Verwendung des Taschenrechners die fehlenden Maße:

α	90°		15°		105°		390°		225°	
x		$\frac{5\cdot\pi}{6}$		$\frac{3\cdot\pi}{8}$		$\frac{5\cdot\pi}{2}$		$\frac{7\cdot\pi}{4}$		$\frac{11\cdot\pi}{3}$

c) Gib unter Verwendung der obigen Verhältnisgleichung Näherungswerte für die fehlenden Maße an (2 Nachkommastellen). Schätze zuvor die Größenordnung ab!

α	50°		10°		110°		870°		2°	
x		5		1,2		$\frac{7\cdot\pi}{18}$		10		2