Umrechnen von Ebenengleichungen

Spickzettel Aufgaben Lösungen PLUS

1. Zunächst bestimmt man einen Normalenvektor $\vec{n}$. Mithilfe von $\vec{n}$ und einem Punkt stellt man dann eine Koordinatengleichung auf.

a)
$$E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}$$

Normalenvektor bestimmen mit dem Kreuzprodukt:

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot4 & - & 0\cdot1\\0\cdot(-2) & - & 2\cdot4\\2\cdot1 & - & 1\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-0\\0-8\\2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-8\\4\end{pmatrix}$$
$$\widehat{=}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

Beim Normalenvektor kommt es wie auch bei Richtungsvektoren nur auf die **Richtung** und nicht auf seine **Länge** an. Wir haben also die Möglichkeit, die Koordinaten des Normalenvektors zu „kürzen“, wie in diesem Fall: damit erhalten wir einen möglichen Normalenvektor, mit dem sich später leichter rechnen lässt.

$$E:\ x_1-2x_2+x_3=d$$

Ortsvektor $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ in E einsetzen:

$$1-4+0=d=-3$$

$$\Rightarrow\ E:\ x_1-2x_2+x_3=-3$$

b)
$$E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$$

Normalenvektor bestimmen mit dem Kreuzprodukt:

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}3-0\\4+3\\0-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\7\\-2\end{pmatrix}$$

$$E:\ 3x_1+7x_2-2x_3=d$$

Ortsvektor in E einsetzen:

$$-3+28-2=d=23$$

$$\Rightarrow\ E:\ 3x_1+7x_2-2x_3=23$$

c)
$$E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

Normalenvektor bestimmen mit dem Kreuzprodukt:

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}0-4\\8-1\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\7\\1\end{pmatrix}$$

$$E:\ -4x_1+7x_2+x_3=d$$

Ortsvektor in E einsetzen:

$0+14+3=d=17$

$\Rightarrow\ E:\ -4x_1+7x_2+x_3=17$

d) $E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

Normalenvektor bestimmen mit dem Kreuzprodukt:

$\vec{n}=\begin{pmatrix}-2-3\\6-2\\1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\4\\3\end{pmatrix}$

$E:\ -5x_1+4x_2+3x_3=d$

Ortsvektor in E einsetzen:

$-5+0-3=d=-8$

$\Rightarrow\ E:\ -5x_1+4x_2+3x_3=-8$

2. Zuerst bestimmt man einen Normalenvektor $\vec{n}$, dann die Normalenform der Ebene.

a) $E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$

Normalenvektor bestimmen mit dem Kreuzprodukt:

$\vec{n}=\begin{pmatrix}1-0\\6-0\\0-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\6\\-3\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\ E:\ \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\6\\-3\end{pmatrix}=0$

b) $E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}$

Normalenvektor bestimmen mit dem Kreuzprodukt:

$\vec{n}=\begin{pmatrix}-4-2\\4-4\\1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\0\\3\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\ E:\ \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-6\\0\\3\end{pmatrix}=0$

3. Bei dieser Aufgabe gibt es verschiedene Lösungen, die davon abhängen, wie man den x-Vektor erstellt.

a) $E:\ x_1+2x_2-x_3=4$

Nach x_1 auflösen:

$x_1=4-2x_2+x_3$

x-Vektor erstellen:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 + (-2)x_2 + x_3 \\ x_2 &= 0 + x_2 + 0x_3 \\ x_3 &= 0 + 0x_2 + x_3 \end{aligned}$$

Nun kann man die Parameterform direkt ablesen:

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alternativ kann man auch drei Punkte bestimmen und die Parametergleichung wie gewohnt aufstellen.

b) $E:\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -2$

Nach x_3 auflösen:

$x_3 = -2 - 2x_1 + x_2$

x-Vektor erstellen:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 + x_1 + 0x_2 \\ x_2 &= 0 + 0x_1 + x_2 \\ x_3 &= -2 + (-2)x_1 + x_2 \end{aligned}$$

Nun kann man die Parameterform direkt ablesen:

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alternativ kann man auch drei Punkte bestimmen und die Parametergleichung wie gewohnt aufstellen.

c) $E:\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$

Nach x_2 auflösen:

$x_2 = 1 + 3x_1 + 2x_3$

x-Vektor erstellen:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 + x_1 + 0x_3 \\ x_2 &= 1 + 3x_1 + 2x_3 \\ x_3 &= 0 + 0x_1 + x_3 \end{aligned}$$

Nun kann man die Parameterform direkt ablesen:

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alternativ kann man auch drei Punkte bestimmen und die Parametergleichung wie gewohnt aufstellen.

d) $E:\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 2$

Nach x_1 auflösen:

$x_1 = 2 + 4x_2 + 2x_3$

x-Vektor erstellen:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 + 4x_2 + 2x_3 \\ x_2 &= 0 + x_2 + 0x_3 \\ x_3 &= 0 + 0x_2 + x_3 \end{aligned}$$

Nun kann man die Parameterform direkt ablesen:

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alternativ kann man auch drei Punkte bestimmen und die Parametergleichung wie gewohnt aufstellen.