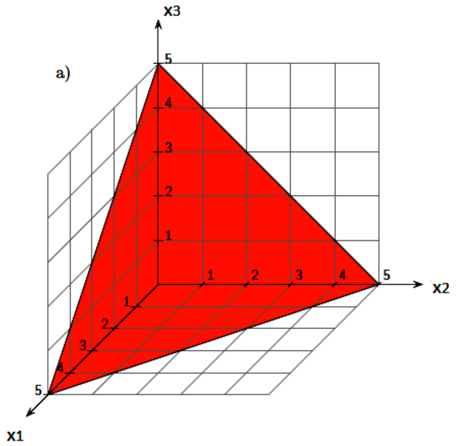
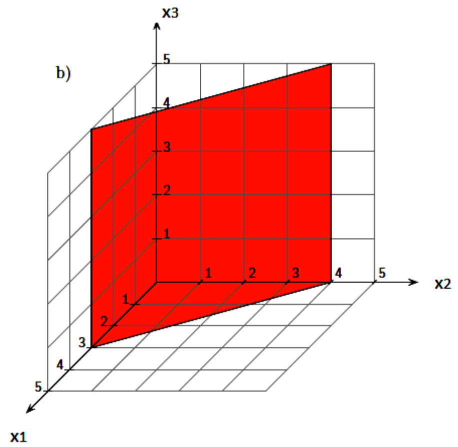
Übungen zu Ebenen **RUH**

1. Die Punkte A (2 | 3 | 0) , B (4 | 0 | −2) und C (1 | 1 | −3) legen eine Ebene E fest. Liegen die Punkte P(−7 | 2 | −5) und Q(−2 | 2 | −4) auch in E?

2. Geben Sie die Gleichung einer Ebene an, die den Punkt A(2 | 3 | 0) enthält und
a.) parallel zur x_2x_3-Ebene verläuft.
b.) senkrecht zur x_2-Achse verläuft.

3. Ermitteln Sie eine Parameterform der dargestellten Ebenen:





4. Geben Sie die Gleichung einer Ebene an, die den Punkt A(2 | 3 | 0) und die Gerade

$$g: X = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$ enthält.

5. Zwei sich schneidende Geraden legen eine Ebene fest. Stellen sie die Gleichung auf.

$$g: X = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$ schneiden sich.

6. Zwei echt parallele Geraden legen eine Ebene fest. Stellen Sie die Gleichung auf.

$$g: X = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: X = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$ sind echt parallel.

7. Liegen die beiden Geraden $g: X = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $h: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

in einer Ebene?

Lösungen:

(1)

Die Punkte A(2 / 3 / 0) , B(4 / 0 / -2) und C(1 / 1 / -3) legen eine Ebene E fest.
Liegen die Punkte P(-7 / 2 / -5) und Q(-2 / 2 / -4) auch in E?

E:

$$x(\lambda,\mu) := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4-2 \\ 0-3 \\ -2-0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1-2 \\ 1-3 \\ -3-0 \end{pmatrix}$$

$0 = 9 + 2 \cdot \lambda - \mu$

P:

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4-2 \\ 0-3 \\ -2-0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1-2 \\ 1-3 \\ -3-0 \end{pmatrix}$$

$0 = 1 - 3 \cdot \lambda - 2 \cdot \mu$

$0 = -2 \cdot \lambda - 3 \cdot \mu + 5$

2I-II:

$0 = 17 + 7\lambda$

Is ungleich, also P $\notin$E

3I-III

$0 = 22 + 8\lambda$

$0 = 4 + 2 \cdot \lambda - \mu$

Q:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4-2 \\ 0-3 \\ -2-0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1-2 \\ 1-3 \\ -3-0 \end{pmatrix}$$

$0 = 1 - 3 \cdot \lambda - 2 \cdot \mu$

$0 = -2 \cdot \lambda - 3 \cdot \mu + 4$

2I-II:

$0 = 7 + 7\lambda$

$\lambda = -1$

Is gleich, also Q $\in$E

in I:

$0 = 4 - 2 - \mu$

$\mu = 2$

3I-III

$0 = 8 + 8\lambda$

$\lambda = -1$

$\Rightarrow$

$$x(-1,2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(2)

Geben Sie die Gleichung einer Ebene an, die den Punkt A(2 / 3 / 0) enthält und
a.) parallel zur x2x3-Ebene verläuft
b.) senkrecht zur x2-Achse verläuft

a.)

$$x(\lambda,\mu) := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b.)

$$x(\lambda,\mu) := \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

(4)
Geben Sie die Gleichung einer Ebene an, die den Punkt A(2 / 3 / 0) und die Gerade

g: $x = \begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}$ enthält.

$$rv2 := \begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$
E:

$$x = \begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

(5)
Zwei sich schneidende Geraden legen eine Ebene fest. Stellen sie die Gleichung auf.

g: $x = \begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}$ und h: $x = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ schneiden sich

$\Rightarrow$
E:

$$x = \begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$$

(6)
Zwei echt parallele Geraden legen eine Ebene fest. Stellen Sie die Gleichung auf.
g:

$$x = \begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}$$

und h:

$$x = \begin{pmatrix}0\\5\\-3\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}2\\\frac{3}{2}\\-1\end{pmatrix}$$

sind echt parallel
$\Rightarrow$
E:

$$x = \begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}5-0\\1-5\\-1+3\end{pmatrix}$$

(7)

Liegen die beiden Geraden g: $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und h: $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ in einer Ebene?

Bastele Ebene aus g und dem Richtungsvektor von h. Liegt der Aufpunkt von h in dieser Ebene?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 4 \cdot \lambda + 2 \cdot \mu \\ 1 + 3 \cdot \lambda \\ -1 - 2 \cdot \lambda - \mu \end{pmatrix}$$

aus II:

$$\lambda = \frac{4}{3}$$

in I:

$$1 = 5 + 4 \cdot \frac{4}{3} + 2 \cdot \mu$$

$$\mu = \frac{-14}{3}$$

beide in III:

$$-3 = -1 - 2 \cdot \frac{4}{3} - \frac{-14}{3}$$

$$-3 \neq 1$$

$\Rightarrow$

Sie liegen nicht in einer Ebene