Ganzrationale Funktionen

Vorwort: Dieses Skript zu den ganzrationalen Funktionen bezieht sich zum größten Teil auf die Ausführungen von Herrn **Friedrich W. Buckel** vom Internatsgymnasium Schloss Torgelow.

1. Allgemeines über ganzrationale Funktionen

Definition: Eine Funktion heißt **ganzrational**, wenn man ihren Funktionsterm auf die folgende **Normalform** bringen kann:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 \qquad \text{mit } n \geq 0.$$

Die Zahlen a_0 , a_1 bis a_n heißen **Koeffizienten** der Potenzen x^0, x^1 bis x^n. Der Koeffizient a_0 heißt auch **absoluter Teil**, weil dieser absolut unveränderlich ist, während $a_1 x^1$ usw. variabel sind.

Die **höchste vorkommende Hochzahl n** (mit $a_n \neq 0$) heißt **Grad der Funktion**. Der Term auf der rechten Seite heißt auch **Polynom** in der **Normalform.**

Beispiele:

$f(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 1$ ist eine ganzrationale Funktion **4. Grades** mit den Koeffizienten $a_4 = 1$, $a_3 = -3$, $a_2 = -2$, $a_1 = 0$ und $a_0 = 1$.

$g(x) = x^5 - 5x^3 + 2x$ ist eine ganzrationale Funktion **5. Grades** mit den Koeffizienten $a_5 = 1$, $a_4 = 0$, $a_3 = -5$, $a_2 = 0$, $a_1 = 2$ und $a_0 = 0$.
Weil das Polynom **nur ungerade** Exponenten hat, nennt man g(x) auch eine **ungerade Funktion**.

$h(x) = (x^2 - 1)^2$ ist eine gerade ganzrationale Funktion **4. Grades**. Dies erkennt man, wenn man das Polynom in die Normalform bringt: $h(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.

Definitions- und Wertebereich

Der **Definitionsbereich** einer Funktion besteht aus allen reellen Zahlen, denen man einen Funktionswert f(x) zuordnen kann. Da bei ganzrationalen Funktion x weder im Nenner, noch unter einer Wurzel oder in einem Logarithmus vorkommt, haben **alle ganzrationalen Funktionen den maximalen Definitionsbereich D = IR**, d.h. zu jeder reellen Zahl x ist ein Funktionswert f(x) berechenbar.

Unter dem **Wertebereich W** einer Funktion versteht man die Menge aller möglichen Funktionswerte f(x), bezogen auf den vorgegebenen Definitionsbereich.

2. Die Symmetrie von ganzrationalen Funktionen

Nachweis der Symmetrie von ganzrationalen Funktionen

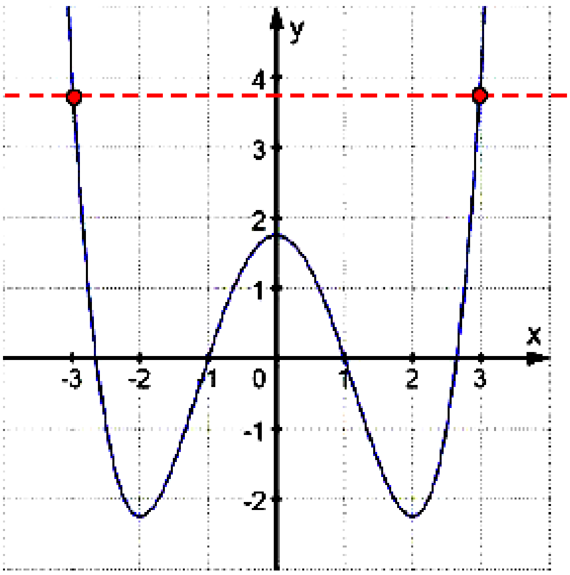
Berechne zunächst **f(-x)**. Gilt für alle reellen Zahlen **x:**

f(-x) = f(x), dann ist der Graph der Funktion f **achsensymmetrisch zur y-Achse**.

f(-x) = -f(x), dann ist der Graph der Funktion f **punktsymmetrisch zum Ursprung**.

Beispiele:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + \frac{7}{4}$$

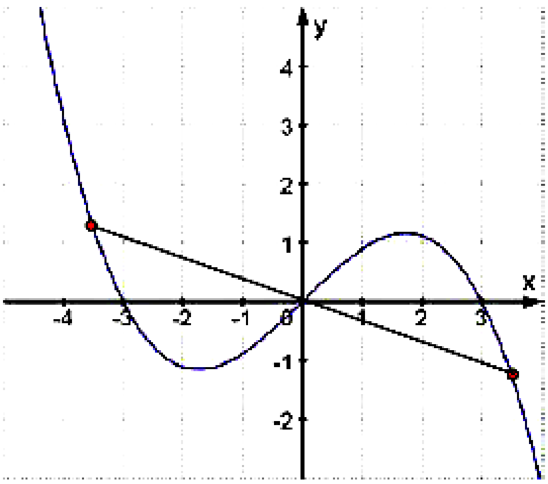


Weil f **nur gerade** Exponenten besitzt (der absolute Teil gehört zu den geraden Potenzen), gilt **f(−x) = f(x)**.

Das bedeutet, dass der Graph von f **symmetrisch zur y-Achse** ist.

Geometrisch gesehen wird der Funktionsgraph zur Funktion f **an der y-Achse gespiegelt**.

$$g(x) = -\frac{1}{9}x^3 + x$$



Weil g(x) **nur ungerade** Exponenten besitzt, gilt **g(-x) = -g(x)**.

Das bedeutet, dass der Graph von g **punktsymmetrisch zum Ursprung (0 | 0)** ist.

Geometrisch gesehen wird der Funktionsgraph zur Funktion g **um den Ursprung (0 | 0) um 180° gedreht**.

Wenn eine Funktion **ungerade und gerade Exponenten** besitzt (der absolute Teil gehört zu x^0), liegt **weder** Achsensymmetrie **noch** Punktsymmetrie vor.

3. Das Grenzverhalten von ganzrationalen Funktionen

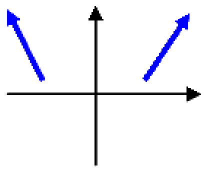
Das Verhalten einer ganzrationalen Funktion f für sehr große und sehr kleine x-Werte, wird nur durch den Summanden mit der **höchsten x-Potenz** bestimmt.

Die Funktion f mit $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$ **verhält sich im Unendlichen** ähnlich wie die Funktion g mit $g(x) = a_n x^n$.

<u>Beispiel:</u>

Die Funktion $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 7$ verhält sich für große positive bzw. große negative x-Werte (also im Unendlichen) wie die Funktion $g(x) = 2x^3$. Das bedeutet, dass der Graph der Funktion von unten kommt und nach oben geht.

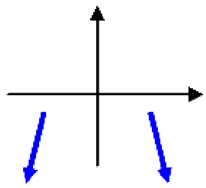
Übersicht: Folgende 4 Möglichkeiten gibt es:



$f(x) = a \cdot x^{\text{gerade}} + \ldots$ **mit a > 0**

z.B. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \ldots$

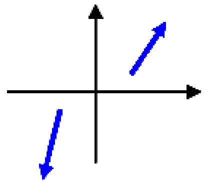
Für $x \to \pm\infty$ gilt $f(x) \to \infty$.



$f(x) = a \cdot x^{\text{gerade}} + \ldots$ **mit a < 0**

z.B. $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \ldots$

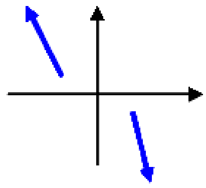
Für $x \to \pm\infty$ gilt $f(x) \to -\infty$.



$f(x) = a \cdot x^{\text{ungerade}} + \ldots$ **mit a > 0**

z.B. z.B. $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \ldots$

Für $x \to \infty$ gilt $f(x) \to \infty$.
und für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to -\infty$



$f(x) = a \cdot x^{\text{ungerade}} + \ldots$ **mit a < 0**

z.B. z.B. $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \ldots$

Für $x \to \infty$ gilt $f(x) \to -\infty$
und für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$

<u>4. Nullstellen ganzrationaler Funktionen</u>

<u>Hinweis:</u> Eine **Nullstelle ist ein Wert x mit dem Funktionswert f(x) = 0**, also ein Punkt der Form **(x | 0)**. An der Stelle x **schneidet <u>oder</u> berührt** der Graph die x-Achse. Die Berechnung von Nullstellen geht also stets mit dem Lösen der Gleichung $f(x) = 0$ einher.

<u>Satz:</u> Eine ganzrationale Funktion **n-ten Grades** hat **<u>höchstens</u> n Nullstellen**.

Eine ganzrationale Funktion von **<u>ungeradem</u> Grad** besitzt stets **<u>mindestens</u> eine Nullstelle**, da ihr Wertebereich die ganzen reellen Zahlen abdeckt (kommt von unten und geht nach oben oder umgekehrt).

<u>Satz:</u> Eine ganzrationale Funktion **n-ten Grades** besitzt höchstens **(n-1) Extremstellen** (noch ohne Beweis).

<u>Fundamentalsatz der Algebra:</u>

Jede ganzrationale Funktion lässt sich als Produkt von linearen und quadratischen Funktionen darstellen.

Bestimmung der ganzzahligen Nullstellen einer ganzrationalen Funktion

1. Ausklammern einer Potenz von x. x_1.= 0.

2. Untersuchung der Restfunktion mit den Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen quadratischer Funktionen:

   a) **Fehlt nur der absolute Teil a_0**, so **klammert man x aus** und bestimmt auf diese Weise die Nullstellen der Funktion.

   b) **Fehlt der lineare Teil**, so bestimmt man die Nullstellen durch **Wurzelziehen**.

   c) **Sind alle Teile der quadratischen Funktion vorhanden**, so bedient man sich der **pq-Formel**) (Hinweis: a_2 muss gleich 1 sein!)

Die viel angewandte **pq-Formel** bezieht sich auf die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ und führt zur Lösung

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Vorzeichenwechsel bei Nullstellen

$$\begin{Bmatrix} \text{einfache, dreifache, u.s.w.} \\ \text{zweifache, vierfache, u.s.w.} \end{Bmatrix} \text{Nullstellen bedeuten} \begin{Bmatrix} \text{Schnittpunkte mit Vorzeichenwechsel} \\ \text{Berührpunkte ohne Vorzeichenwechsel} \end{Bmatrix}$$

Beispiele:

Die Funktionen **$f(x) = x^2$** und **$g(x) = x^4$** haben beispielsweise jeweils **einen Berührpunkt mit der x-Achse im Ursprung (0 | 0)**.

Die Funktionen **$h(x) = x^3$ und $i(x) = x^5$** haben beispielsweise jeweils **einen Schnittpunkt mit der x-Achse im Ursprung (0 | 0)**.

Hinweise zur Bestimmung der Nullstellen

a) Quadratischer Funktionen:

Der Funktionsgraph einer quadratischen Funktion f mit **$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$** kann **0, 1 oder 2 Schnittpunkte mit der x-Achse** haben. Dazu muss jeweils die quadratische Gleichung **$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$** gelöst werden.

Fehlt der **zweite** (oder **dritte Summand**) dieser Gleichung, dann sollte man die Verfahren **Wurzelziehen** (oder **Faktor x ausklammern**) verwenden.

b) Biquadratischer Funktionen:

Eine Funktion der Form $\mathbf{f(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0}$, in der nur die geraden Exponenten 2 und 4 vorkommen, heißt **biquadratische („zweifach quadratische") Funktion** und kann durch Ersetzen **(Substitution)** von $\mathbf{x^4 = u^2}$ in eine quadratische Funktion der Form $\mathbf{a_4u^2 + a_2u + a_0}$ überführt werden. Die Nullstellen dieser quadratischen Funktion ermittelt man dann wie oben (vgl. a)).

Die Lösungsmenge der Gleichung $\mathbf{a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 = 0}$ enthält dann neben den beiden möglichen Nullstellen $\mathbf{x_1 = \sqrt{u_1}}$ und $\mathbf{x_2 = \sqrt{u_2}}$ auch die weiteren Nullstellen $\mathbf{x_3 = -\sqrt{u_1}}$ und $\mathbf{x_4 = -\sqrt{u_2}}$ **.**

Beispiel: Die Funktion f mit $\mathbf{f(x) = x^4 - 5x^2 + 4 = u^2 - 5u + 4}$ besitzt die Nullstellen $\mathbf{u_{1/2} = \pm 1}$ und $\mathbf{u_{3/4} = \pm 2}$.

Der Zusammenhang zwischen Funktions- und Ableitungsgraph

Der Verlauf eines Funktionsgraphen kann durch besondere Punkte und Merkmale charakterisiert werden:

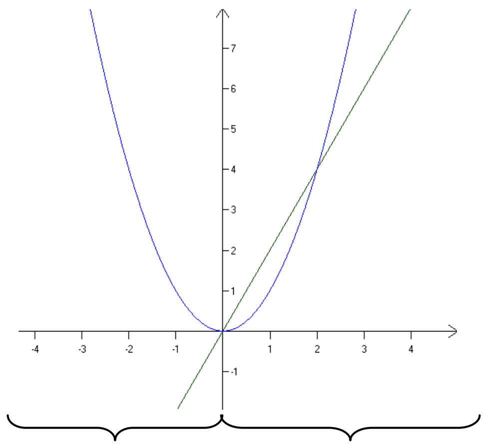
(i) Steigen und Fallen eines Funktionsgraphen

Eine Funktion f(x) heißt **streng monoton steigend** bzw. **streng monoton fallend**, wenn für $x_1 < x_2$ gilt: $\mathbf{f(x_1) < f(x_2)}$ bzw. $\mathbf{f(x_1) > f(x_2)}$

In den Bereichen, in denen der Funktionsgraph zur Funktion **f(x) monoton steigt**, verläuft der Funktionsgraph der zugehörigen Ableitungsfunktion **f '(x) oberhalb der x-Achse**, er nimmt also positive y-Werte an. **Fällt** der Funktionsgraph zur Funktion **f(x) monoton**, so verläuft der Funktionsgraph der von **f '(x) unterhalb der x-Achse**, er nimmt also negative Werte an.

Beispiel: $\mathbf{f(x) = x^2}$

$\mathbf{f'(x) = 2x}$



streng monoton fallend **streng monoton steigend**

(ii) Extrempunkte einer Funktion

Besitzt eine Funktion f(x) einen Extrempunkt an einer Stelle x_0, so gilt: $\mathbf{f'(x_0) = 0}$.
Dies bezeichnet man als **notwendiges Kriterium** für Extremstellen.

In der Nähe eines Hochpunktes (Tiefpunktes) ist für $x < x_0$ die Ableitung **f '(x) positiv (negativ)** und für $x > x_0$ ist die Ableitung **f '(x) negativ (positiv)**.

Sonderfall: Für den Fall, dass die Ableitungsfunktion **f '(x)** in einer Umgebung der möglichen Extremstelle keinen Vorzeichenwechsel zeigt, besitzt die Ausgangsfunktion einen so genannten **Sattelpunkt**.

Beispiel: $\mathbf{f(x) = x^3}$ **an der Stelle** $\mathbf{x_0 = 0}$

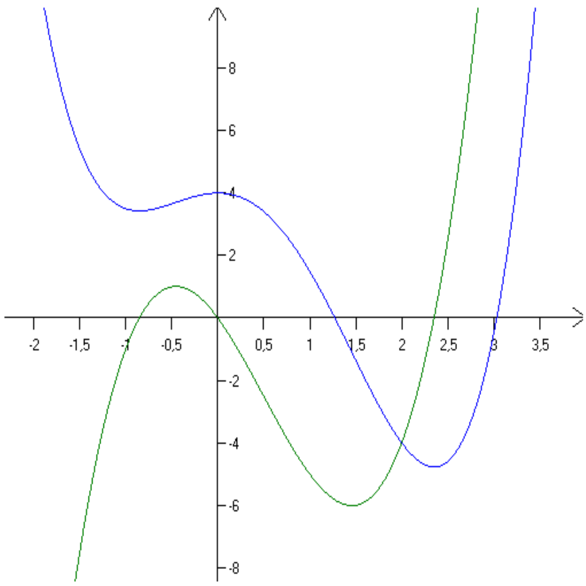
Hinweis:
Zwischen je zwei Hochpunkten liegt ein Tiefpunkt und umgekehrt.
Bei Polynomfunktionen gibt es **höchstens n Nullstellen** und **höchstens (n-1) Extremstellen.**

Beispiel: $\mathbf{f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - 2x^2 + 4}$
$\mathbf{f'(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x}$

f '(x) = 0 $\Rightarrow 2x^3 - 3x^2 - 4x = 0$
$\Leftrightarrow \underbrace{x(2x^2 - 3x - 4)}$ $= 0 \Rightarrow x_1 = 0$

weiter betrachten:
$(2x^2 - 3x - 4) = 0$

pq-Formel liefert: $x_2 = 4$
$x_3 = (-1)$



Betrachte Vorzeichenwechsel (VZW) um zu überprüfen, ob ein **Hochpunkt, Tiefpunkt** oder **Sattelpunkt** vorliegt:

VZW bei x_1 von + nach – $\Rightarrow$ **Hochpunkt**
VZW bei x_2 von – nach + $\Rightarrow$ **Tiefpunkt**
VZW bei x_3 von – nach + $\Rightarrow$ **Tiefpunkt**